



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

Колледж СамГТУ

Чипура А.С.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

*Методические указания к
практическим занятиям*

Печатается по решению методической комиссии Колледжа СамГТУ (протокол № 3 от 22.11.2024 г.).

Составитель: Чипура А.С.

Математические методы решения прикладных профессиональных задач:
методические указания к практическим занятиям студентов СПО / Чипура А.С. – Самара:
Самарский государственный технический университет, 2024

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности среднего профессионального образования 08.02.13 Монтаж и эксплуатация внутренних сантехнических устройств, кондиционирования воздуха и вентиляции. Методические указания включают в себя комплект методических материалов, необходимых для успешной подготовки и участия в проведении практических занятий по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» студентам СПО.

Содержание

Введение

.....

.....3

Практическое занятие № 1. Действия над матрицами.....	5
Практическое занятие № 2. Вычисление определителей 2, 3 и 4 порядков	7
Практическое занятие работы № 3. Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы	9
Практическое занятие № 4. Действия с векторами	12
Практическое занятие № 5. Задачи на составление уравнений и построение прямых и плоскостей	14
Практическое занятие № 6. Нахождение параметров кривых второго порядка. Построение кривых второго порядка	16
Практическое занятие № 7. Действия с комплексными числами, записанными в различных формах. Решение уравнений	19
Практическое занятие № 8. Раскрытие неопределенностей.....	28
Практическое занятие № 9. Вычисление производных, исследование функции	34
Практическое занятие № 10. Вычисление приближенных значений функции. Оценка погрешности	39
Практическое занятие № 11. Приложения определенного интеграла	40
Практическое занятие № 12. Вычисление вероятностей случайных событий	43
Практическое занятие № 13. Анализ, обработка и графическое представление данных.....	45
Литература.....	49

Введение

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в печатном или электронном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по дисциплине Математические методы решения прикладных профессиональных задач у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по дисциплине Математические методы решения прикладных профессиональных задач:

- 1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;
- 2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;
- 3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;
- 4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;
- 5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Критерии оценки:

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практическое занятие № 1

Действия над матрицами

Цель работы: Научиться выполнять действия с матрицами.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Матрицы».

Задание на занятие:

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 5A - 2B$.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A^T \cdot B$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot B$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot B - B \cdot A$.

5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 3A^2 - 2B^2$.

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется матрицей?
2. Что называется суммой матриц?
3. Что называется произведением матрицы на число?
4. Какая матрица называется транспонированной к матрице A ?
5. Как найти произведение двух матриц?
6. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонированной к матрице A называется матрица A^T , у которой строки и столбцы меняются местами.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Действия с матрицами

1) *Умножение матрицы на число.* Для того чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ , нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

2) *Сложение матриц.* Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых индексов i, j .

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) *Умножение матриц.* Произведение матрицы A на матрицу B (обозначается AB) определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В результате умножения получим матрицу $C = AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A , и столько же столбцов, сколько их в матрице B .

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие № 2

Вычисление определителей 2, 3 и 4 порядков

Цель работы: Научиться вычислять определители 2, 3 и 4 порядков.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Определители».

Задание на занятие:

Вычислить определители:

$$1. \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -22 \end{vmatrix}. \quad 3. \begin{vmatrix} 121 & 110 \\ 132 & 121 \end{vmatrix}. \quad 4. \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} \log_2 5 & -\log_9 16 \\ \log_8 3 & \log_5 2 \end{vmatrix}. \quad 6. \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}. \quad 7. \begin{vmatrix} 1\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}. \quad 9. \begin{vmatrix} 5 & 1 & -16 \\ -4 & -2 & 13 \\ 8 & -4 & -23 \end{vmatrix}. \quad 10. \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & 22 \\ 4 & -11 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$11. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 9 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Порядок проведения занятия:

4. Получить допуск к работе
5. Выполнить задания
6. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

4. Наименование, цель занятия, задание;
5. Выполненное задание;
6. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Какие способы вычисления определителей вам известны?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определение

1. Определителем или **детерминантом** **второго** **порядка**, соответствующим матрице, называется число, равное разности произведений элементов стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих на побочной диагонали (определитель обозначается или $\det A$).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Пример 1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) = 29$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти элементов:

Определение 2. Определителем или **детерминантом** **третьего** **порядка**, соответствующим матрице (1.2), называется число равное

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Структура этого выражения помогает понять наглядное правило Саррюса. Припишем к элементам определителя справа первый и второй столбцы определителя. Три произведения, соответствующие прямым, параллельным главной диагонали, надо взять со знаком плюс, а остальные три произведения, соответствующие прямым, параллельным побочной диагонали, надо взять его со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 =$$

Пример 1. $= -16 + 3 + 4 - 16 + 1 - 12 = -36.$

Свойства определителей

1⁰. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2⁰. Перестановка двух строк или столбцов определителя равносильна умножению его на (-1).

3°. Если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

4°. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ .

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5°. Если все элементы некоторого столбца или строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6°. Если элементы двух строк или двух столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7°. Если каждый элемент любого столбца или любой строки определителя представлен в виде двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ аналогично для определителей 2-го порядка.}$$

8°. Если к элементам некоторой строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на любой общий множитель λ , то величина определителя не изменится.

Определение 3. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент, т.е. i – ой строки и j – го столбца.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Для вычисления алгебраических дополнений элементов определителей третьего порядка

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

знаки легко запомнить по следующей схеме:

$$\text{Например: } A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 5 = 21 - 25 = -4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot (-4) = 4.$$

9°. Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\text{Например: } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}.$$

10°. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или строки равна нулю.

$$\text{Например: } a_{12}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{2j} = 0.$$

Практическое занятие № 3

Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Системы линейных уравнений»

Задание на занятие:

1. Решить системы линейных уравнений методом обратной матрицы, методом Крамера и методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x + 5y + 6z = 7 \\ 9x + 2y - 3z = 60 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x - 5y - 4z = 3 \\ x + y - 5z = 11 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

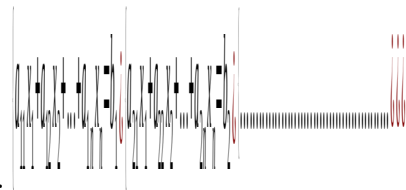
1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Как записать простейшее матричное уравнение?
2. Укажите алгоритм решения простейшего матричного уравнения.
3. Как проверить правильность решения простейшего матричного уравнения?
4. Сформулируйте теорему Крамера.
5. Запишите формулы Крамера.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений.



Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Обозначим матрицу коэффициентов перед неизвестными: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

вектор неизвестных: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, вектор свободных членов: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в равносильной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Это равенство называется простейшим матричным уравнением. Такое уравнение решается следующим образом. Если матрица \mathbf{A} – невырожденная (т.е. $|\mathbf{A}| \neq 0$), тогда решение находится по формуле:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

Пример. Решить матричным методом систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

Составим матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} :

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

Теорема Крамера. Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Это решение может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \text{определитель системы}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{vmatrix}$$

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решением системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Для этой системы линейных уравнений вида матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей системы, а матрица}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ называется расширенной матрицей системы}$$

Суть метода заключается в том, что систему уравнений с помощью элементарных преобразований приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называются прямым ходом. Затем из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Элементарными преобразованиями систем являются:

- 1) Умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число
- 2) Сложение и вычитание уравнений
- 3) Перестановка уравнений системы местами.
- 4) Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса
Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Выполним над этой матрицей следующие преобразования:

- 1) поменяем местами 1 и 2 строки;

- 2) прибавим к элементам 2 строки 1-ю строку, умноженную на -2;
- 3) прибавим к элементам 3 строки 1-ю строку, умноженную на -7;
- 4) прибавим к элементам 3 строки 2-ю строку, умноженную на -3;

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получили систему с треугольной матрицей. Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Практическое занятие № 4

Действия с векторами

Цель работы: Научиться выполнять действия с векторами

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Векторы. Операции над векторами»

Задание на занятие:

1. Даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Построить векторы $\vec{c} = 3\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)$, $\vec{d} = -2(\vec{a} + \vec{b})$.
2. Найти координаты векторов \vec{AB} , \vec{CB} , \vec{CA} , если $A(2; 3)$, $B(-1; -3)$, $C(-7; 5)$.
3. Даны векторы $\vec{a} = (-2; 4)$ и $\vec{b} = (3; 1)$. Найти: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{e} = 3\vec{a}$, $\vec{f} = 5\vec{b}$.
4. Найти длину вектора \vec{AB} , если $A(5; 2)$, $B(8; -2)$.
5. Дан треугольник с вершинами $A(7; 7)$, $B(4; 3)$, $C(3; 4)$. Найти его периметр.
6. Отрезок AB задан точками $A(2; 3)$, $B(10; 11)$. Найти координаты точки C , если известно, что $|AC|:|CB|=3:5$.
7. Найти длину медианы AM треугольника с вершинами $A(7; -4)$, $B(-1; 8)$, $C(-12; -1)$.
8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (5; 7)$ и $\vec{b} = (4; 3)$.
9. Найти угол между векторами $\vec{a} = (4; 0)$ и $\vec{b} = (2; -2)$.
10. Найти углы треугольника с вершинами $A(6; 7)$, $B(3; 3)$, $C(1; -5)$.

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется вектором? Длиной вектора?
2. Как сложить два вектора?
3. Как найти разность двух векторов?
4. Как умножить вектор на число?

5. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
6. Как найти длину вектора, заданного двумя точками?
7. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
8. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
9. Как найти угол между векторами?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой вектор** – это вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$|\vec{AB}| = |\vec{a}|$$

Действия над векторами

1. Суммой двух векторов называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, удовлетворяющий условию: если начало вектора \vec{b} перенести в точку, являющуюся концом вектора \vec{a} , начало вектора \vec{c} совпадет с началом вектора \vec{a} , а конец – с концом вектора \vec{b} (правило треугольника).

2. Произведением вектора \vec{a} на число α называется вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{b}| = \alpha |\vec{a}|$;
- 2) вектор \vec{b} коллинеарен вектору \vec{a} ;
- 3) вектор \vec{a} сонаправлен с вектором \vec{b} ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$ и противоположно направлен ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Координаты вектора

Пусть точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, заданы в прямоугольной декартовой системе координат. Чтобы найти координаты вектора \vec{AB} нужно из координат его конца вычесть координаты начала т.е. $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат своими координатами, то

1) при сложении двух и большего числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;

2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$;

3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\vec{a}(x; y)$, то $k\vec{a}(kx; ky)$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки на плоскости $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Если точка $M(x; y)$ **делит отрезок AB в отношении λ/μ** , то координаты этой точки

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}$$

определяются как:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

Скалярным произведением двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$, где ϕ - угол между векторами $0 \leq \phi \leq 180^\circ$. Углом между векторами называется угол между их направлениями.

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\hat{\vec{a}\vec{b}} = \pi/3$.

$$\begin{aligned} 15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} &= 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 36 = \\ &= 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336. \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$; $\vec{b}(x_2; y_2)$ в прямоугольной декартовой системе координат, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$. Используя полученные равенства, получаем

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \phi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

или в координатной форме:

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = (5; -3)$, $\vec{b} = (3; 5)$

$$\cos \phi = \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot 5}{\sqrt{25 + 9} \sqrt{9 + 25}} = \frac{0}{34} = 0; \quad \phi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. заданные векторы перпендикулярны.}$$

Практическое занятие № 5

Задачи на составление уравнений и построение прямых и плоскостей

Цель работы : Научиться составлять уравнения прямых.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Прямая на плоскости»

Задание на занятие:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(5; 3)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}(5; 0)$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a}(-5; 3)$.
3. Треугольник задан точками $A(5; 2)$, $B(-1; -4)$, $C(-5; -3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно AC .
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 3)$, $B(4; 1)$.

5. Составить уравнения медиан треугольника с вершинами $A(7; 0)$, $B(3; 6)$, $C(-1; 1)$.
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 3)$ и перпендикулярной прямой $4x + 3y - 12 = 0$.
7. Записать уравнения прямых в отрезках и построить их:
 - а) $2x + 5y + 20 = 0$;
 - б) $x - 8y + 4 = 0$.

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку и имеющей нормальный вектор.
3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку и имеющей направляющий вектор.
4. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A , B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Нормальным вектором прямой l называется любой ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярный этой прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A . Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$. Тогда искомое уравнение примет вид: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

Направляющим вектором прямой l называется всякий ненулевой вектор $\vec{a}(m, n)$, параллельный этой прямой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1, y_1)$ и направляющий вектор $\vec{a}(m, n)$, тогда уравнение прямой, проходящей через точку M_1 в направлении вектора \vec{a} имеет вид: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$. Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. Запишем каноническое

уравнение прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$, преобразуем его. Получим $x + y - 3 = 0$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой,

проходящей через эти точки имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя записанную выше формулу, получаем: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2}$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2}$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и

обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент $C \neq 0$, то, разделив на

C , получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках. $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$, тогда $a = -1$, $b = 1$. Уравнение прямой в отрезках примет вид

$$-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$$

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$, $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$$4x = 6y - 6; 2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2} \cdot 12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.
 Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Практическое занятие № 6

Нахождение параметров кривых второго порядка. Построение кривых второго порядка

Цель работы: Научиться составлять уравнения кривых 2-го порядка, строить их.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Кривые 2-го порядка»

Задание на занятие:

1. Составить уравнение окружности с центром $O(3; -2)$ и радиусом $r = 5$. Построить ее.
2. Построить окружность $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$.
3. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось $2b = 6$, а расстояние между фокусами $|F_1 F_2| = 8$.
4. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$.
5. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная ось которой $2b = 10$, а уравнения асимптот имеют вид: $y = \pm \frac{5}{3}x$.
7. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.
8. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $x + 3 = 0$.

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Дать определение кривых второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы), записать их канонические уравнения.
2. Что называется эксцентриситетом эллипса, гиперболы? Как его найти?
3. Записать уравнение равносторонней гиперболы

ПРИЛОЖЕНИЕ

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть центром окружности является точка $O(a; b)$, а расстояние до любой точки $M(x; y)$ окружности равно R . Тогда $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – каноническое уравнение окружности с центром $O(a; b)$ и радиусом R .

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к каноническому виду. Для этого выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 &= 121/16 \end{aligned}$$

Отсюда находим координаты центра $O(2; -5/4)$; радиус $R = 11/4$.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Фокусы обозначаются буквами F_1, F_2 , расстояние между фокусами – $2c$, сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов – $2a$ ($2a > 2c$), a – большая полуось; b – малая полуось.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b и c связаны между собой равенствами: $a^2 - b^2 = c^2$ (или $b^2 - a^2 = c^2$).

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к длине большей оси и называется эксцентриситетом. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Т.к. по определению $2a > 2c$, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т.е. $0 \leq \varepsilon < 1$.

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0), F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Расстояние между фокусами: $2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$.

По условию $2a = 2$, следовательно, $a = 1, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$. Искомое уравнение

эллипса примет вид: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, где a, b и c связаны между собой равенством $a^2 + b^2 = c^2$. Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат. Фокусы

обозначаются буквами F_1, F_2 , расстояние между фокусами – $2c$, разность расстояний от любой точки гиперболы до фокусов – $2a$ ($2a < 2c$). Ось $2a$ называется действительной осью гиперболы, ось $2b$ – мнимой осью гиперболы. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

которых

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к

длине действительной оси: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$. Т.к. по определению $2a < 2c$, то эксцентриситет гиперболы всегда выражается неправильной дробью, т.е. $\varepsilon > 1$.

Если длина действительной оси равна длине мнимой оси, т.е. $a = b$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, то гипербола называется *равносторонней*.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Тогда - искомое уравнение гиперболы.

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F , директриса – d , расстояние от фокуса до директрисы – p .

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид:

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px$$

Уравнения директрис соответственно $x = -p/2$, $x = p/2$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат, имеет вид:

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py$$

Уравнения директрис соответственно $y = -p/2$, $y = p/2$

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точки, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$. $r = x + p/2 = 4$; следовательно:

$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Практическое занятие № 7

Действия с комплексными числами, записанными в различных формах. Решение уравнений

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Комплексные числа».

Задание на занятие:

1. Вычислить:

- 1) $i^{145} + i^{147} + i^{264} + i^{345} + i^{117}$;
- 2) $(i^{64} + i^{17} + i^{13} + i^{82}) \cdot (i^{72} - i^{34})$;
- 3) $i^{123} + (1 - i)^6 - (1 + i)^8$.

2. Найти значение многочлена $x^{25} - 8x^{14} + 5x^4 - 4x^2 - 10$ при $x = i$

3. Найти сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2 , заданных в виде пар $Z_1(-2; 1)$, $Z_2(3; -1)$. Изобразить их геометрически.

4. Построить сумму векторов, изображающих следующие комплексные числа: $Z_1 = 2 - i$; $Z_2 = -3 + 2i$.
5. Сократить дроби:
- 1) $\frac{9m^2 + 4n^2}{3m - 2in}$;
 - 2) $\frac{x+1}{\sqrt{x+i}}$.
6. Вычислить:
- 1) $-\frac{2i}{5-i}$;
 - 2) $\frac{1+2i}{-2+i} \cdot (-1) + 1$;
 - 3) $\frac{(2+3i) - (5+7i)}{2+3i}$;
 - 4) $\frac{6+2i}{3-7i} - \frac{2+3i}{2+5i}$;
 - 5) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i} \right)^2$;
 - 6) $\frac{m\sqrt{n} - n\sqrt{mi}}{n\sqrt{m} + m\sqrt{ni}}$.
7. Найти Z^{-1} , если $Z = 7 - 12i$.
8. Решить уравнения:
- 1) $x^2 + 2x + 2 = 0$;
 - 2) $4x^2 - 20x + 26 = 0$;
 - 3) $(2 - 5i) \cdot z = 2 + 5i$;
 - 4) $(3 - 2i) \cdot z = 3 + i$.
9. Даны комплексные числа $Z_1 = 3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ и $Z_2 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$.
Найти: $Z_1 \cdot Z_2$, $\frac{Z_1}{Z_2}$, $(Z_2)^4$, $\sqrt[3]{Z_1}$.
10. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.
- 1) $Z = 5i$;
 - 2) $Z = -2 - 2i$;
 - 3) $Z = -3\sqrt{3} + 3i$;
 - 4) $Z = -6$.
11. Записать комплексные числа в алгебраической и показательной формах.
- 1) $Z = 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$;
 - 2) $Z = 5(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$;
 - 3) $Z = 8(\cos \frac{15\pi}{4} + i \sin \frac{15\pi}{4})$;
 - 4) $Z = 6,3(\cos 10\pi + i \sin 10\pi)$.
12. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах.
- 1) $Z = 4e^{-\frac{\pi}{4}i}$;
 - 2) $Z = 1,8e^{\frac{11\pi}{3}i}$;
13. Выполнить действия, используя показательную форму комплексного числа:
- $$\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$$
14. Решить уравнения:
- 1) $z^4 = i$;
 - 2) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе

2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется мнимой единицей? Как вычисляются степени мнимой единицы?
2. Какое число называется комплексным?
3. Как геометрически изображаются комплексные числа?
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?
5. Как выполняются сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме?
6. Какие корни и сколько корней имеет квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом?
7. Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Как они вычисляются?
8. Как записывается комплексное число в тригонометрической, показательной формах?
9. Как найти произведение и частное комплексных чисел, записанных в тригонометрической, показательной формах?
10. Как возвести в степень число, записанное в тригонометрической, показательной формах?
11. Сколько значений имеет корень n -й степени, записанное в тригонометрической, показательной формах?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Комплексным числом z называется выражение вида $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется *действительной частью* числа z ($a = \operatorname{Re} z$), а b – *мнимой частью* ($b = \operatorname{Im} z$). Такая форма записи называется алгебраической формой комплексного числа.

Число $\bar{z} = a - ib$ называется *сопряженным числу* $z = a + ib$

Действия с комплексными числами в алгебраической форме

1) Сложение и вычитание: $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

2) Умножение: $z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 =$
 $= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

3) Деление: $\frac{z_1}{z_2}$. Для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое, нужно числитель и знаменатель дроби домножить на число, сопряженное знаменателю:

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Пример. Даны два комплексных числа $z_1 = -7 - 2i$; $z_2 = 2 - 7i$. Найти значение выражения $\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^4$ в алгебраической форме.

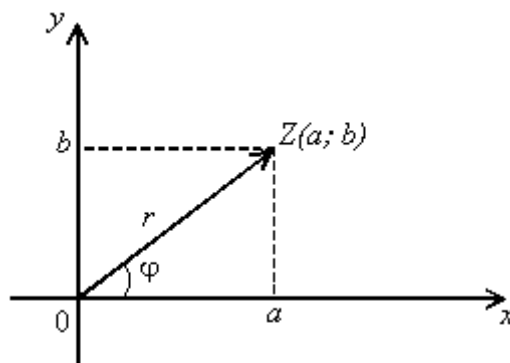
Произведем деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

Геометрическая форма комплексного числа

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом ось ОХ будет являться действительной числовой осью, а ОУ - мнимой осью.



Тригонометрическая форма комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Показательная форма комплексного числа $z = re^{i\varphi}$

Величина r называется *модулем* комплексного числа, а угол наклона φ - *аргументом*

комплексного числа. $r = |z|$; $\varphi = \text{Arg } z$; $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = \text{Arg } z = \arctg \frac{b}{a}$;

Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Пусть комплексные числа $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$ записаны в тригонометрической форме и $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ - в показательной.

В тригонометрической и показательной формах удобно производить следующие действия:

1. Умножение: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$; $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

2. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$

3. Возведение в степень: $z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$; $z^n = r^n e^{in\phi}$, где n – натуральное число.

4. Извлечение корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi k}{n}); \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\phi + 2\pi k}{n}}$$

Корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример. Число $z=2-2\sqrt{3}i$ записать в тригонометрической форме, найти z^{20} , $\sqrt[3]{z}$

Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в тригонометрической форме.

$$r=|z|=\sqrt{4+12}=4; \quad \phi=\operatorname{arctg} \frac{b}{a}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}. \quad \text{Тогда} \quad z=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

$$z^{20}=4^{20}\left(\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}\right)=4^{20}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\phi+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right); \quad k \in Z.$$

При $k=0$ получим

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right); \quad k \in Z.$$

При $k=1$ получим

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{16\pi}{9}+i\sin\frac{16\pi}{9}\right); \quad k \in Z.$$

При $k=2$ получим

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{20\pi}{9}+i\sin\frac{20\pi}{9}\right); \quad k \in Z.$$

При $k=3$ получим

Практическое занятие № 8

Раскрытие неопределенностей

Цель работы: Научиться вычислять пределы функций.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Теория пределов. Непрерывность»

Задание на занятие:

Вычислить пределы следующих функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right);$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 + 4x^3 - 16}{x+2};$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 + 3x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3}{x^2 - x^3};$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1};$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5};$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{1+x}};$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3x}{5x^3};$

12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x};$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x;$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{2x}{x+3}};$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x} \right)^x;$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Как прочесть запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$? Дать определение предела функции в точке.
2. Как избавиться от неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$?
3. Сформулируйте замечательные пределы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Число b называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенствам $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$ верно неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Пример. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 9x}{6x^2}$.

Сначала найдем предел знаменателя: $\lim_{x \rightarrow 1} 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$. Предел знаменателя отличен от нуля, следовательно, можно воспользоваться теоремами 4, 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 9x}{6x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 7x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 9x}{\lim_{x \rightarrow 1} 6x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 7x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 9x}{\lim_{x \rightarrow 1} 6x^2} = \frac{7 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1}{6 \cdot 1^2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при $x \rightarrow a$* , где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Типы неопределенностей и методы их раскрытия

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

I. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пример. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$

При подстановке вместо переменной x числа -2 видим, что получается

$$\frac{0}{0}$$

неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x+2$. В результате получим новый предел, знаменатель которого при подстановке вместо переменной x числа -2 не равен нулю. Этот предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$$

Пример. Вычислить предел

$$\frac{0}{0}$$

При подстановке $x=0$ получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное числителю выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} = \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

II. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия этой неопределенности нужно каждое слагаемое числителя и знаменателя разделить на переменную в наибольшей степени и учитывая, что величина обратная бесконечно большой величине есть бесконечно малая величина, раскроем исходную неопределенность.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 7}$$

Пример. Вычислить предел

Здесь числитель и знаменатель не имеют предела, т.к. оба неограниченно возрастают. В этом

$$\frac{\infty}{\infty}$$

случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое на переменную в наибольшей степени, т.е. на x^4 . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^4}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} + \frac{7}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{7}{x^4}} = \frac{5}{2}$$

Величины $\frac{3}{x^2}, \frac{1}{x^4}, \frac{7}{x^4}$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow \infty$ и их пределы равны нулю.

$$\frac{5}{2}$$

Следовательно, искомый предел равен $\frac{5}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$$

Пример. Вычислить предел

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^2 . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} = \infty$$

Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Первый замечательный предел:

Следствия: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Следствие: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Третий замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Четвертый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ при $0 < a < 1, a > 1$.

Часто если непосредственное нахождение предела какой-либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Пример. Вычислить предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \rightarrow A$. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow A$ называются **эквивалентными**

бесконечно малыми, если $\lim_{x \rightarrow A} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Записывают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

При $x \rightarrow 0$ эквивалентными бесконечно малыми являются следующие функции:

1. $\sin x \sim x$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$;
3. $\ln(1+x) \sim x$;
4. $e^x - 1 \sim x$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
6. $a^x - 1 \sim x \ln a$;
7. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$;
8. $\arcsin x \sim x$;
9. $\operatorname{arctg} x \sim x$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно

малыми, получим: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Практическое занятие № 9

Вычисление производных, исследование функции

Цель работы: Научиться находить производные высших порядков, применять правило Лопиталья к вычислению пределов, исследовать функцию с помощью производной 1 и 2 порядков.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной».

Задание на занятие:

1. Найти производные следующих функций:

1) $y = (7x^2 + 2x - 1)^6$;

2) $y = \sin(2x - 1)$;

3) $y = \sqrt[3]{x^2 - 6x}$;

4) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

5) $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$

6) $y = \cos^{100} x$;

7) $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$;

8) $y = e^{\sqrt{x}}$;

9) $y = e^{-x} \ln \operatorname{tg} x$;

10) $y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}$.

2. Вычислить производные функций в заданных точках:

1) $f(x) = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$ Найти $f'(0)$

2) $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$ Найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$

3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ Найти $f'(e)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $f'(e^2)$

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталья.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

4. Исследовать функции на возрастание, убывание, выпуклость, вогнутость. Найти точки экстремума и точки перегиба.

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$

2) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

4) $f(x) = (x - 1)^4$

$$5) f(x) = 2x^2 + \ln x$$

5. . Найти асимптоты графиков функций:

$$1) f(x) = \frac{x+5}{x-3}$$

$$2) f(x) = \frac{5x}{x-1}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$$

6. Исследовать функции по общей схеме и построить графики.

$$1) f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$2) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$3) f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$$

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется производной функции?
2. Как найти производную от сложной функции?
3. Как вычислить частное значение производной?
4. Что называется производной второго порядка? n -го порядка?
5. Сформулируйте правило Лопиталя
6. Дайте определение выпуклой, вогнутой функции.
7. Как исследовать функцию выпуклость, вогнутость?
8. Что называется асимптотами графика функции?
9. Какие виды асимптот вы знаете? Как они находятся?
10. Как найти область определения функции?
11. Как исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность?
12. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
13. Как исследовать функцию на монотонность, экстремумы, выпуклость вогнутость, точки перегиба?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ при x принадлежащему некоторому отрезку $[a; b]$. Возьмем произвольную точку x_0 из этого отрезка.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ (если этот предел существует).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Таким образом, Если этот предел конечный, то функция называется **дифференцируемой** в точке x_0 .

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ где $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f , т.е. задана сложная функция.

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема по u , а функция $u = g(x)$ дифференцируема по x , то производная сложной функции по независимой переменной x определяется равенством: $y' = f'(u) \cdot u'(x)$

Пусть c - постоянное число, $u = u(x)$, $v = v(x)$ - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие **правила дифференцирования**:

- 1) $(c)' = 0$, $(cu)' = cu'$;
- 2) $(u+v)' = u' + v'$;
- 3) $(uv)' = u'v + v'u$;
- 4) $(u/v)' = (u'v - v'u)/v^2$;

Табличные значения производных основных функций

$$1. (u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$2. (a^u)' = a^u \ln a u'$$

$$3. (e^u)' = e^u u'$$

$$4. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} u'$$

$$5. (\ln u)' = \frac{1}{u} u'$$

$$6. (\sin u)' = \cos u u'$$

$$7. (\cos u)' = -\sin u u'$$

$$8. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$9. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$12. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$$

$$13. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$$

Пример. Вычислить производную функции: $y =$

Для нахождения данной производной сначала преобразуем заданную функцию: $y = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}$. Далее воспользуемся 1 табличным значением:

$$y' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{4}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

$$\frac{2x^2+3}{7x^2+2}$$

Пример. Вычислить производную функции: $y =$

Данная производная вычисляется по 4 правилу дифференцирования ($u=2x^2+3$, $v=7x^2+2$):

$$y' = \frac{(2x^2+3)' \cdot (7x^2+2) - (2x^2+3) \cdot (7x^2+2)'}{(7x^2+2)^2} = \frac{4x \cdot (7x^2+2) - (2x^2+3) \cdot 14x}{(7x^2+2)^2} = \frac{28x^3+8x-28x^3-42x}{(7x^2+2)^2} = -\frac{34x}{(7x^2+2)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = e^{3-4x}$

Данная функция является сложной. Обозначим $u = 3 - 4x$, тогда $y = e^u$. Далее воспользовавшись 3 табличным значением производной, получим:
 $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{3-4x} \cdot (3 - 4x)' = e^{3-4x} \cdot (-4) = -4 e^{3-4x}$

Пример. Вычислить производную функции: $y = (5x^2+3x-7)^6$

Данная функция является сложной. Обозначим $u = 5x^2+3x-7$, получим функцию $y = u^6$, для нахождения производной которой воспользуемся 1 табличным значением:

$$y' = 6u^5 = 6 \cdot (5x^2+3x-7)^5 \cdot (5x^2+3x-7)' = 6 \cdot (5x^2+3x-7)^5 \cdot (10x+3).$$

Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ - дифференцируема на некотором интервале. Тогда,

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

дифференцируя ее, получаем первую производную

Если найти производную функции $f'(x)$, получим **вторую производную** функции $f(x)$:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \text{ т.е. } y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n :

Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья

Теорема Лопиталья. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля в окрестности точки a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Замечание. Теорема остается в силе и в том случае, когда в точке $x = a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в бесконечность.

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}$$

Правило Лопиталья. Для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ надо заменить предел отношения двух функций пределом отношения их производных. Если окажется, что отношение производных имеет конечный предел, то к этому же пределу стремится и отношение данных функций.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

Пример: Найти предел

$$\frac{0}{0}$$

При попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы

$$\text{Лопиталья: } f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; g'(x) = e^x. \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Пример: Найти предел

При подстановке $x = 0$ получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя. Найдем производные числителя и знаменателя: $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $g'(x) = 1 - \cos x$ и подставим их в предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз. $f''(x) = e^x - e^{-x}$; $g''(x) = \sin x$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ - применяем правило Лопиталя еще раз.}$$

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; g'''(x) = \cos x; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для раскрытия других неопределенностей $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 их следует предварительно преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Пример

Неопределенности вида 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ в окрестности точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

Пример: Найти предел

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln y} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 0; \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln y} = 1$$

Следовательно

График функции $f(x)$ называется **выпуклым** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной к любой его точке. График функции $f(x)$ называется **вогнутым** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше касательной, проведенной к любой его точке.

Теорема (достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции). Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную $f''(x)$ и она положительна, то функция вогнута на этом интервале. Если же $f''(x)$ отрицательна на интервале $(a; b)$, то функция выпукла на этом интервале.

Точка графика функции при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется **точкой перегиба**.

Теорема (достаточное условие существования точки перегиба) Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную $f''(x)$ и при переходе через точку $x = x_0$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба.

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты. Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$. Вертикальные асимптоты обычно сопровождают точки разрыва второго рода и если функция непрерывна, то вертикальных асимптот нет.

Например, для функции $f(x) = \frac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты. Наклонная асимптота задается уравнением $y = kx + b$. Для точного определения этой прямой необходимо найти коэффициенты k и b . Они находятся

следующим образом: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$

Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

Пример. Найти асимптоты функции $y = \frac{9x}{9-x^2}$.

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой, т.к. в этих точках функция имеет разрыв 2-го рода.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9-x^2} = 0$, следовательно, наклонной асимптоты

функция не имеет. Найдем $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$, т.е. $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Схема исследования функций

1. Найти область определения функции и определить точки разрыва, если они имеются.
2. Установить, является функция четной или нечетной или ни той ни другой. Если функция четна или нечетна, то достаточно рассмотреть ее значения при $x > 0$, а затем симметрично относительно оси ОУ или начала координат восстановить ее и для значений $x < 0$.
3. Исследовать функцию на периодичность. Если функция периодическая, то достаточно рассмотреть ее на одном периоде.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно)
5. Провести исследование функции на экстремум и найти интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти точки перегиба кривой и интервалы выпуклости, вогнутости функции.
7. Найти асимптоты графика функции.

8. Пользуясь результатами шагов 1-7, строят график функции. Иногда для большей точности находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

1) Областью определения функции являются промежутки $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1, x = -1$.

$$y(-x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$$

2) Функция является нечетной, т.к.

3) Функция не периодическая.

4) График пересекает оси координат в точке $(0; 0)$.

5) Находим критические точки.

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки: $x = 0; x = -\sqrt{3}; x = \sqrt{3}; x = -1; x = 1$.

Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ -1 < x < 0, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 0 < x < 1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \end{aligned}$$

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

6) Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -1 < x < 0, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ 0 < x < 1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \end{aligned}$$

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

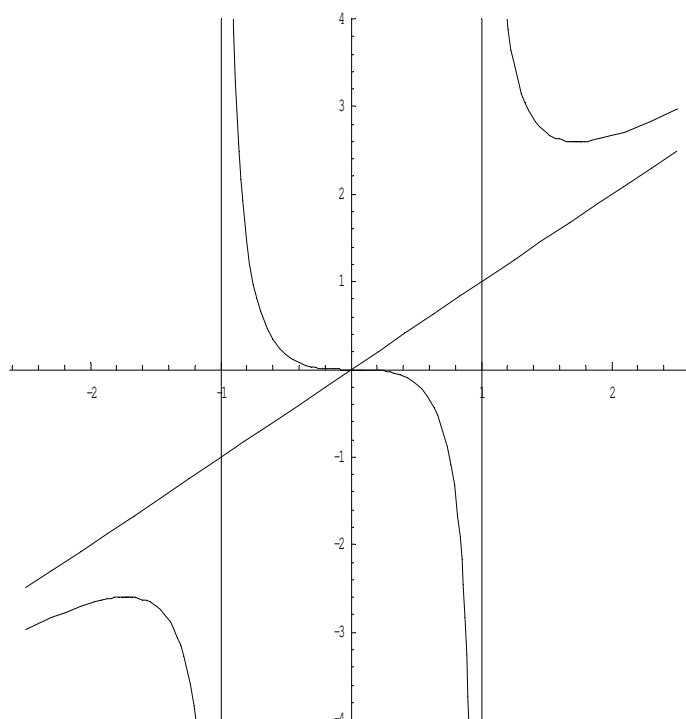
7) Найдем асимптоты кривой. Прямые $x = 1$, $x = -1$ являются вертикальными асимптотами, т.к. в них односторонние пределы равны бесконечности. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = x$.

8) Построим график функции по результатам исследования.



Практическое занятие № 10

Вычисление приближенных значений функции. Оценка погрешности

Цель работы: Научиться находить дифференциал функции, вычислять приближенные значения функции, приращения функции с помощью дифференциала

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»

Задание на занятие:

1. Найти дифференциалы следующих функций:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3} x$

2) $y = \arccos x^3$

3) $y = \cos^2 x$

$$4) y = e^{\sin x}$$

$$5) y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ в точке } x = 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 5, \text{ при}$$

2. Найти приближенное значение приращения функции
изменении аргумента от $x = 3$ до $x = 3,1$

1. На сколько приближенно изменится значение степени 2^5 , если основание увеличится на 0,003?

2. Сторона квадратного листа жести, равная 15 см, после нагревания увеличилась на 0,001 см. Вычислите приближенно, на сколько изменилась площадь этого листа.

3. Найти приближенное значение функции:

$$1) y = \sqrt{x^3 - 2x} \text{ в точке } x = 1,96$$

$$2) y = x \ln(x - 2) \text{ в точке } x = 3,012$$

4. Вычислить приближенные значения:

$$1) (1,025)^{10}$$

$$2) \sqrt[5]{31}$$

$$3) e^{-0,005}$$

$$4) 2^{2,98}$$

$$5) \cos 61^\circ$$

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется дифференциалом функции? Как найти дифференциал функции?
2. Как с помощью дифференциала вычислить приближенное значение функции, приращения функции?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная относительно Δx функция $f'(x_0)\Delta x$, составляющая главную часть приращения функции в точке x_0 . Обозначается $df(x_0)$ или dy . Вычисляется по формуле: $dy = f'(x)dx$.

$$\text{Пример. Найти дифференциал функции } y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$, найдем производную

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x.$$

Тогда дифференциал будет равен $dy = x \cos 2x dx$.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

1. Вычисление приближенного значения приращения функции: $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$

Пример. Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y = x^3 - 7x^2 + 80$ при изменении аргумента от 5 до 5,01.

Найдем дифференциал функции $dy = (3x^2 - 14x)dx$. Подставим значения $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,01$.
Получим $\Delta f(x_0) \approx (3 \cdot 5^2 - 14 \cdot 5) \cdot 0,01 = 0,05$

2. Вычисление приближенного значения функции: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$

Пример. Вычислить приближенное значение с помощью дифференциала $1,998^5$.

Рассмотрим функцию $f(x) \approx x^5$, где $x = 1,998$. Разобьем x на x_0 и Δx ($x = x_0 + \Delta x$), пусть $x_0 = 2$, тогда $\Delta x = -0,002$.

Найдем значение $f(x_0) = 2^5 = 32$, $df(x) = 5x^4 dx$, $df(x_0) = 5 \cdot 2^4 \cdot (-0,002) = -0,16$

Тогда $1,998^5 \approx 32 - 0,16 = 31,84$.

Практическое занятие №11

Решение прикладных задач с помощью определенного интеграла

Цель работы: Научиться вычислять определенные интегралы, находить площади фигур, ограниченных линиями, объемы тел вращения.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной».

Задание на занятие:

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 8 см, если для сжатия ее на 1 см нужно приложить силу в 10 Н.

2. Скорость движения точки меняется по закону $v = 4t - t^2$, где v – скорость, м/с; t – время, с. Вычислить: путь, пройденный точкой за третью секунду движения; путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 6]$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 8x + 16$; $y = 6 - x$

2) $y = \frac{1}{x}$

3) $x = -3$, $x = -1$, осью абсцисс

3) $y = x^2 - 2$ ($x \geq 0$), $y = -1$, $y = 7$, $x = 0$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy кубической параболы $y = x^3$ в пределах от $y = 1$ до $y = 8$

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить работу, совершенную при растяжении пружины на 6 см, если для сжатия ее на 3 см нужно приложить силу 15 Н.

2. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 6t^2 - 4t - 10$, см/с. Вычислить: путь, пройденный точкой за первые 4 секунды движения; путь, пройденный точкой за четвертую секунду движения.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 6x + 9$; $3x - y - 9 = 0$

2) $y = \frac{x^2}{3}$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$

3) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 1$, $y = 0$, $x = 0$

4. Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox трапеции,

образованной прямыми $y = \frac{1}{2}x$, $x = 4$, $x = 6$ и осью абсцисс

ВАРИАНТ 3

1. Вычислите работу, совершаемую при сжатии пружины на 0,05 м, если для ее сжатия на 0,02 м нужна сила в 10 Н.

2. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 3t^2 - 2t - 1$, м/с. Вычислить: путь, пройденный точкой за 5 секунд после начала движения; путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = 0$;

2) $y^2 = x$, $y = x^2$

3) $y = 16x^3$, $y = 2$, осью ординат

4. Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy трапеции, образованной прямыми $y = 3x$, $y = 2$, $y = 4$ и осью ординат

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 6 см, если для растяжения ее на 1 см нужно приложить силу в 10 Н.

2. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 24t - 6t^2$, м/с. Вычислить: путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки; путь, пройденный точкой за вторую секунду движения.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 1$, $y = 2x + 9$, $x = 0$, $y = 0$

2) $y = e^{-2x}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$

3) $x + 2y - 8 = 0$, $y = 1$, $y = 3$

4. Криволинейная трапеция, ограниченная гиперболой $y = \frac{4}{x}$ и прямыми $x = 3$, $x = 12$ вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 Н растягивает ее на 1 м.

2. Скорость движения точки меняется по закону $v = 4t - t^2$, где v – скорость, м/с; t – время, с. Вычислить: путь, пройденный точкой за первые 3 секунды движения; путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = x + 3$

2) $y^3 = x$, $y = 1$, $x = 8$

3) $x = \sqrt{y}$, $y = 1$, $y = 4$, осью ординат

4. Найти объем тела, полученного от вращения кривой $y = \frac{1}{4}x^2$ вокруг оси Oy в пределах от $y = 1$ до $y = 5$

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

1. Наименование, цель занятия, задание;
2. Выполненное задание;
3. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Как найти площадь криволинейной трапеции? Может ли она получиться отрицательной, равной нулю и почему?
2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
3. В чем заключается физический смысл определенного интеграла?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно вычислять площади плоских фигур, так как эта задача всегда сводится к вычислению площадей криволинейных трапеций.

Площадь всякой фигуры в прямоугольной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилегающих к оси Ox или к оси Oy .

Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:

1. По условию задачи сделать схематический чертеж
2. Представить искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
3. Записывают каждую функцию в виде $y = f(x)$.
4. Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.

Рассмотрим несколько вариантов расположения фигур.

1) Пусть на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения. Тогда график функции $y = f(x)$ расположен над осью Ox .

$$\int_a^b f(x) dx$$

Площадь такой фигуры вычисляется по формуле: $S =$

2) Пусть на отрезке $[a; b]$ неположительная непрерывная функция $f(x)$. Тогда график функции $y = f(x)$ расположен под осью Ox :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Площадь такой фигуры вычисляется по формуле: $S = - \int_a^b f(x) dx$

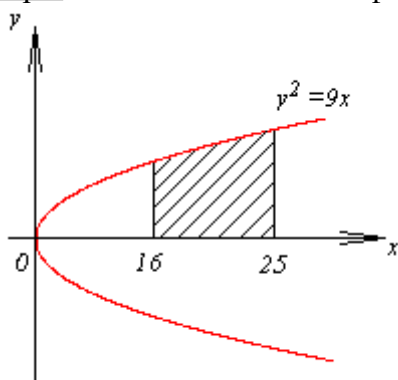
3) Фигура ограничена двумя непрерывными кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем $f(x) \geq g(x)$ на отрезке $[a; b]$.

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Площадь такой фигуры вычисляется по формуле: $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

4) Пусть на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Тогда отрезок $[a; b]$ нужно разбить на такие части, в каждой из которых функция не изменяет знак, затем по приведенным выше формулам вычислить соответствующие этим частям площади и найденные площади сложить.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 9x$, $x = 16$, $x = 25$, $y = 0$.



Для любого значения $x \in [16; 25]$ функция $y = \sqrt{9x}$ принимает положительные значения, поэтому площадь

$$\int_{16}^{25} \sqrt{9x} dx$$

заданной фигуры находится по формуле: $S = \int_{16}^{25} \sqrt{9x} dx = 3 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_{16}^{25} = 2x\sqrt{x} \Big|_{16}^{25} = 2(125 - 64) = 122 \text{ (кв.ед.)}$

Вычисление объема тела вращения

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox , то получим так называемое **тело вращения**, объем которого может быть легко найден по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Аналогично, объем тела вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \phi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y = c$, $y = d$ ($c < d$), находится по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \phi^2(y) dy$$

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и прямыми $x = 0$, $x = \pi$.

Решение. Применяя первую формулу для вычисления объема, получим:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $x = \sqrt{y}$, $y = 1$, $y = 4$.

Решение. Применим вторую формулу для вычисления объема.

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{\pi}{2} \cdot (16 - 1) = \frac{15}{2} \pi$$

Приложения определенного интеграла к решению физических задач

Схема применения определенного интеграла для вычисления некоторой величины u такова. Сначала нужно выразить некоторую переменную часть величины u в виде функции $u(x)$ одного из ее параметров, который изменяется в известном из условия задачи интервале $a \leq x \leq b$. Затем следует рассмотреть приращение Δu величины $u(x)$, отвечающее изменению x на малую величину Δx , и постараться найти для Δu приближенное выражение вида $f(x) \Delta x$ так, чтобы оно отличалось от Δu лишь на бесконечно малую величину. При этом следует пользоваться всеми возможными допущениями, которые в итоге сводятся к отбрасыванию бесконечно малых величин. Искомая величина u определяется интегрированием.

$$u = \int_a^b f(x) dx$$

Задача о нахождении пути, пройденного точкой

Если $v = f(t)$ – скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t , то перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$ равно:

$$S = \int_a^b f(t) dt$$

Пример 4. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v = 15 - 3t$, где v – скорость, м/с; t – время, с. Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

Решение. Так как в момент остановки тела скорость его равна 0, то нужно определить путь, пройденный телом от момента времени $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$ с. Подставив в формулу, получим

$$S = \int_0^5 (15 - 3t) dt = \left(15t - \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^5 = 37,5 \text{ м.}$$

Задача о нахождении работы переменной силы

Если переменная сила $F(x)$ действует в направлении оси Ox , то работа силы на отрезке $[a; b]$ равна

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Пример 5. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 Н растягивает ее на 1 м?

Решение. Согласно закону Гука сила F , растягивающая пружину на x , равна $F(x) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Полагая $x = 0,01$ м и $F(x) = 1$ Н, получим $k = 100$ и, следовательно, $F(x) = 100x$. Подставим значения в формулу и найдем искомую работу:

$$A = \int_0^{0,06} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,06} = 0,18 \text{ Дж.}$$

Практическое занятие 12

Вычисление вероятностей случайных событий

Цель работы: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления обучающихся.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «События. Вероятность события».

Задание на занятие:

ВАРИАНТ 1

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?
4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.
5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.

ВАРИАНТ 2

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.
2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.
3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?
4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.
5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.

ВАРИАНТ 3

1. В ящике 100 деталей, из них 18 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.
2. На складе имеется 25 кинескопов, причем 15 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу кинескопов окажутся 4 кинескопа Минского завода.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы один шар оказался белыми, а два черным?
4. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 28 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
5. При проверке качества электрических лампочек оказалось, что относительная частота бракованных лампочек равна 0,2. Найти число качественных электрических лампочек, если всего было проверено 600 лампочек.

ВАРИАНТ 4

1. Устройство состоит из 15 элементов, из которых 4 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
2. В группе 28 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.
3. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 - стандартные.

4. Отдел технического контроля обнаружил 25 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 300 деталей. Найти относительную частоту появления стандартных деталей.
5. При проверке учебников относительная частота качественных учебников оказалась равной 0,85. найти число бракованных книг, если всего было проверено 400 учебников.

Порядок проведения занятия:

1. Получить допуск к работе
2. Выполнить задания
3. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета:

4. Наименование, цель занятия, задание;
5. Выполненное задание;
6. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?
8. Что называется относительной частотой события?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию к числу всех равновозможных элементарных исходов опыта.

Вероятность события A обозначают через $P(A)$. Если через m обозначить число элементарных исходов, благоприятствующих событию A а через n - число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий, то

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (0 \leq m \leq n)$$

Свойства:

- 1 $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2 $P(A) = 1$ достоверное событие
- 3 $P(A) = 0$ невозможное событие

Практическое занятие 13

Анализ, обработка и графическое представление данных

Цель работы: формирование умений и навыков при вычислении математического ожидания и дисперсии случайной величины, среднего квадратичного отклонения.

Подготовка к работе: Повторить теоретический материал по теме «Случайные величины».

Задание на занятие:

1 вариант

- 1) Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y : $M[X]=3, M[Y]=2$.
Найти математическое ожидание величины $Z=2(X+3Y)(2X-Y)$.

- 2) Закон распределения случайной величины имеет вид:

x_{\square}	0	1	2
p_{\square}	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

- 3) В результате 10 измерений веса тела получены значения: 15, 16, 15, 14, 16, 16, 16, 15, 15, 13. Оценить математическое ожидание и дисперсию веса тела.
- 4) Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.
- 5) Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x_{\square}	0	1	2
p_{\square}	0,3	0,5	0,2

Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

2 вариант

- 1) Известны математические ожидания двух независимых величин X и Y : $M[X]=4, M[Y]=5$. Найти математическое ожидание величины $Z=3(X+2Y)(4X-Y)$.
- 2) Необходимо оценить математическое ожидание и дисперсию по полученной выборке, закон распределения случайной величины имеет вид:

x_{\square}	-0,04	0,06	0,03
p_{\square}	0,6	0,4	0,2

- 3) В результате измерения заряда X некоторого тела в серии из 11 опытов получены следующие результаты:

x_{\square}	7,28	7,30	7,31	7,33
p_{\square}	2	4	3	2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

- 4) Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей

x_{\square}	3	4	5	6	7
p_{\square}	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

- 5) Найдите дисперсию дискретной случайной величины X и ее среднее квадратичное отклонение – числа очков выпадающих при подбрасывании игральной кости.

Приложение

Математическая статистика – это раздел математики, занимающийся разработкой методов сбора, обработки и анализа статистических данных для получения научных и практических выводов. Теория вероятностей является теоретической основой для математической статистики.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты, например некоторое предприятие выпускает партию одинаковых деталей. Если контролируют детали по размеру – это количественный признак.

Можно производить этот контроль сплошным обследованием, то есть измерять каждый из объектов совокупности. Но на практике сплошное обследование применяется редко:

- а) из-за очень большого числа объектов;
- б) из-за того, что иногда обследование заключается в физическом уничтожении, например, проверяем взрываемость гранат или проверяем на крепость произведенную посуду и т.д.

В таких случаях производится случайный отбор ограниченного (небольшого) числа объектов, которые и подвергают изучению.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных однородных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется **число** объектов этой совокупности.

При наборе выборки можно поступать двояко: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В связи с этим выборки подразделяются на повторные и бесповторные.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Это требование коротко формулируется так: выборка должна быть репрезентативной (представительной).

Способы отбора выборки:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части: а) простой случайный бесповторный;
б) простой случайный повторный.
2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части (если объем генеральной совокупности слишком большой):
 - а) типический отбор. Объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из ее «типичных» частей. Например, цех из тридцати станков производит одну и ту же деталь. Тогда отбор делается по одной или по две детали с каждого станка в случайные моменты времени;
 - б) механический отбор. Например, если нужно выбрать 5% деталей, то выбирают не случайно, а каждую двадцатую деталь;
 - в) серийный отбор. Объекты выбирают не по одному, а сериями.

Итак, пусть в соответствии с теорией отбора из генеральной совокупности значений некоторого количественного признака произведена выборка объема n :

где $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$,

x_i ($i = 1, \dots, n$) - числовые значения, которые могут быть положительными,

отрицательными, целыми или дробными.

Таблица 1.1

№	1	2	3	...	n
X	x	x	x	...	x
	1	2	3		n

Таблица 1.1. называется простым статистическим рядом, являющимся первичной формой представления статистического материала. Необходимо выяснить (с той или иной степенью достоверности), каким закономерностям подчиняются значения нашей выборки. С этой целью производятся следующие преобразования в выборке.

Из данных табл. 1.1 находят X_{\min} и X_{\max} , соответственно наименьшее и наибольшее значения выборки. Затем данные табл. 1.1 располагают в порядке

возрастания. Тогда выборка $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, записанная в порядке возрастания, называется вариационным рядом, а её значения – вариантами.

Размах выборки – это длина основного интервала $[x_{\min}; x_{\max}]$, в

который попадают все значения выборки.

Вычисляется **размах** выборки следующим образом: $d = x_{\max} - x_{\min}$.

Математическим ожиданием или средним значением дискретной случайной величины X с законом распределения

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

называется число

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] \text{ или } D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ – среднее квадратичное отклонение случайной величины X .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Осадчая, Л. А. Математические методы решения профессиональных задач : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Л. А. Осадчая. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 53 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-20070-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL
2. Математика и прикладная математика : сб. науч. тр. / Перм. гос. техн. ун-т; ред. кол. А. Р. Абдуллаев и др. — Пермь, Изд-во ПГТУ, 1994. — 117 с.
3. Карпов, Владимир Васильевич Математические модели задач строительного профиля и численные методы их исследования : учеб. пособие. для вузов по строит. специальностям [Текст] / Ассоц. строит. вузов; С.-Петерб. архитектур.-строит. ин-т. — Москва, 1999. — 188 с.
4. Блехман, И.И. Прикладная математика: Предм. логика, особенности подходов: С прим. из механики / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. — М., Изд-во ЛКИ, [2022]. — 376 с.

Электронные издания (электронные ресурсы):

1. Абдуллина, К.Р. Математика: учебник для СПО / К.Р. Абдуллина, Р.Г. Мухаметдинов. — Саратов: Профобразование, 2021. — 288 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/99917.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Андреева, И.Ю. Основы математического анализа. Функция нескольких переменных, дифференциальные уравнения, кратные интегралы: учебное пособие для СПО / И.Ю. Андреева, О.И. Вдовина, Н.В. Гредасов; под редакцией А.Н. Сесекина. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 98 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/87838.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Гурьянова, К.Н. Математический анализ: учебное пособие для СПО / К. Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 330 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/87824.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Матвеева, Т.А. Математика: учебное пособие для СПО / Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова, Л.В. Шевелева; под редакцией Д.В. Александрова. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 215 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/87821.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
5. Никонов, О.И. Математическое моделирование и методы принятия решений: учебное пособие для СПО / О.И. Никонов, С.В. Кругликов, М.А. Медведева; под редакцией А. А. Астафьева. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 99 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/87825.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

6. Трофимова, Е.А. Математические методы анализа: учебное пособие для СПО / Е.А. Трофимова, С.В. Плотников, Д.В. Гилёв; под редакцией Е.А. Трофимовой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 271 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/87823.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7. Филипенко, О.В. Математика: учебное пособие / О.В. Филипенко. — Минск: Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 268 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/94336.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

8. Шевалдина, О.Я. Начала математического анализа: учебное пособие для СПО / О.Я. Шевалдина, Е.В. Стрелкова; под редакцией В.Т. Шевалдина. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 97 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/87833.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

9. Математика в Открытом колледже [Электронный ресурс], URL: <http://www.mathematics.ru>

10. Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО [Электронный ресурс], URL: <https://profspo.ru/>

11. Дорофеева А. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 400 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-03697-8. — Текст : электронный

// ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449047>

12. Лачуга Ю. Ф. Прикладная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Самсонов. — 2-е изд., доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 304 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13214-

4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/475229>

Дополнительные источники:

1. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/470650>

2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/470651>